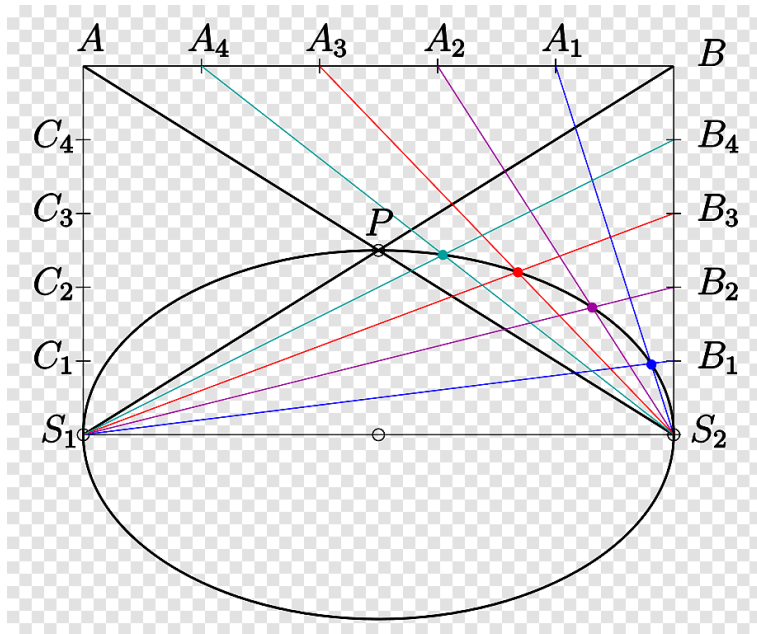


Egy ellipszis - szerkesztés igazolása

Az interneten találtuk az 1. ábra szerinti ellipszis - szerkesztést.



1. ábra – forrása: [1]

Ennek lényege, hogy egy $2a \times 2b$ méretű téglalap oldalait n egyenlő részre osztjuk, majd az egyik (az 1. ábrán az S_1) sarkot összekötjük a szemközti $2b$ hosszúságú téglalap - oldal osztáspontjaival, majd a másik (az S_2) sarkot a $2a$ hosszú oldal osztáspontjaival, és az azonos indexű egyenesek metszéspontjait vesszük figyelembe. Utóbbiak lesznek a pont - tonként szerkesztett ellipszis pontjai.

Az igazoláshoz tekintsük a 2. ábrát! Ez alapján felírjuk a számunkra érdekes egyenesek egyenleteit.

Az S_1 sarokból induló egyenesek meredekségére:

$$\frac{i \cdot \frac{2 \cdot b}{n}}{2 \cdot a} = \frac{y_{S_1}}{x+a} \rightarrow \underline{y_{S_1}(x) = \frac{i \cdot b}{n \cdot a} \cdot (x + a)} . \quad (1)$$

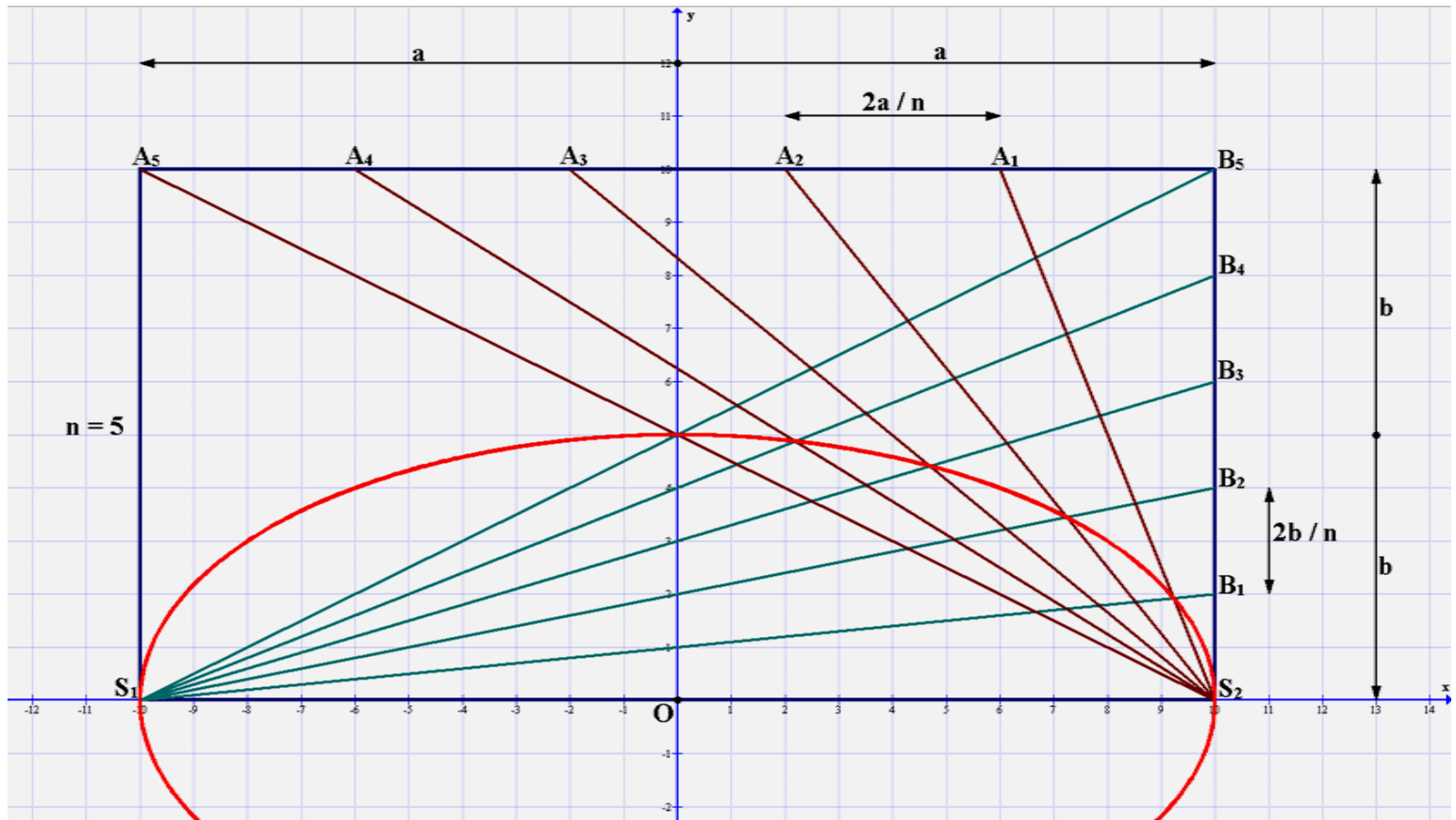
Az S_2 sarokból induló egyenesek meredekségére:

$$\frac{\frac{2 \cdot b}{i \cdot \frac{2 \cdot a}{n}}}{a-x} = \frac{y_{S_2}}{a-x} \rightarrow \underline{y_{S_2}(x) = \frac{n \cdot b}{i \cdot a} \cdot (a - x)} . \quad (2)$$

Ezen egyenesek metszéspontjaira fennáll, hogy:

$$y_{S_1} = y_{S_2} ; \quad (3)$$

most (1), (2) és (3) - mal:



2. ábra

$$\begin{aligned} \frac{i \cdot b}{n \cdot a} \cdot (x + a) &= \frac{n \cdot b}{i \cdot a} \cdot (a - x) , \\ \frac{i}{n} \cdot (x + a) &= \frac{n}{i} \cdot (a - x) \rightarrow i^2 \cdot (x + a) = n^2 \cdot (a - x) , \\ i^2 \cdot x + i^2 \cdot a &= n^2 \cdot a - n^2 \cdot x \rightarrow x \cdot (n^2 + i^2) = a \cdot (n^2 - i^2) , \\ \text{innen:} \end{aligned}$$

$$\underline{x_0 = a \cdot \frac{n^2 - i^2}{n^2 + i^2}} . \quad (4)$$

Majd (1) és (4) - gyel:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{i \cdot b}{n \cdot a} \cdot (x_0 + a) = \frac{i \cdot b}{n \cdot a} \cdot \left(a \cdot \frac{n^2 - i^2}{n^2 + i^2} + a \right) = \frac{i \cdot b}{n \cdot a} \cdot a \cdot \left(\frac{n^2 - i^2}{n^2 + i^2} + 1 \right) = \frac{i \cdot b}{n} \cdot \left(\frac{n^2 - i^2}{n^2 + i^2} + 1 \right) = \\ &= \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{n^2 - i^2 + n^2 + i^2}{n^2 + i^2} = \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{n^2 + n^2}{n^2 + i^2} = \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{2 \cdot n^2}{n^2 + i^2} = i \cdot b \cdot \frac{2 \cdot n}{n^2 + i^2} = 2 \cdot b \cdot \frac{i \cdot n}{n^2 + i^2} , \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{y_0 = 2 \cdot b \cdot \frac{i \cdot n}{n^2 + i^2}} . \quad (5)$$

H az x_0 , y_0 metszéspontok egy ellipszis pontjai, akkor kielégítik az ellipszis kanonikus

egyenletét. Most (4) és (5) - tel:

$$\frac{x_0}{a} = \frac{n^2 - i^2}{n^2 + i^2}, \quad \frac{y_0}{b} = 2 \cdot \frac{i \cdot n}{n^2 + i^2}; \quad (6)$$

ezután (6) egyenleteinek négyzetre emelésével és összeadásával:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 &= \frac{(n^2 - i^2)^2}{(n^2 + i^2)^2} + 4 \cdot \frac{i^2 \cdot n^2}{(n^2 + i^2)^2} = \frac{n^4 - 2 \cdot i^2 \cdot n^2 + i^4 + 4 \cdot i^2 \cdot n^2}{(n^2 + i^2)^2} = \frac{n^4 + 2 \cdot i^2 \cdot n^2 + i^4}{(n^2 + i^2)^2} = \\ &= \frac{(n^2 + i^2)^2}{(n^2 + i^2)^2} = 1, \quad \text{vagyis:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1}}, \quad (7)$$

ami egy ellipszis kanonikus egyenlete.

Ezek szerint a fenti szerkesztés valóban ellipszist eredményez.

Megjegyzések:

M1. A [2] forrásban azt olvashatjuk, hogy

~ az 1. ábra szerinti szerkesztés – a *Steiner* ~ féle szerkesztés;

~ ilyen létezik parabolára és hiperbolára is.

M2. A [3] kézikönyvben az ellipszis hasonló szerkesztését mutatják meg az ellipszis adott két konjugált (fél -)átmérőjére – 3. ábra.

ε) Sind MA_1 und MB_1 (Bild 104) zwei zugeordnete Halbmesser einer Ellipse, so ziehe man die Tangenten durch die Endpunkte der Durchmesser parallel MA_1 und MB_1 ; teile B_1C und B_1M in dieselbe Anzahl gleicher Teile und ziehe durch die Teilpunkte aus A_1 und A_2 Strahlen, dann liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Ellipse.

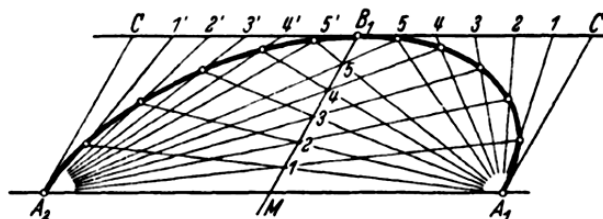


Bild 104. Konstruktion der Ellipse aus zugeordneten Durchmessern

3. ábra – forrása: [3]

M3. A 2. és 3. ábrákon egy negyed - ellipszishez való pont jött össze. A vízszintes és függőleges szimmetriatengelyre tükrözve kaphatjuk meg a többit is, a legegyszerűbben. A 2. és 3. ábrán $n = 5$. Ha valaki kevesli a kapott pontok számát, válassza pl. az $n = 10$ értéket!

M4. A fentihez hasonló szerkesztések a számítógépek térnyerésével egyre inkább csak elvi és történeti jelentőséggel bírnak, ahogyan azt mi látjuk. Ez azonban nem tart vissza minket attól, hogy átgondoljuk ezeket, adott esetben pedig akár gyönyörködjünk is bennük.

Források:

[1] – <https://w7.pngwing.com/pngs/860/826/png-transparent-ellipse-conic-section-hyperbola-triangle-angle-angle-text-triangle.png>

[2] – <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

[3] – **F. Sass ~ Ch. Bouché:** Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau, 1. Band
11. kiadás, Springer - Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg, 1955.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 08. 17.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>